Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei f definiert durch

$$f(x, y) = xy \exp(x - y).$$

a) Zeigen Sie

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (\, y(1 + x) \exp(x - y),\; x(1 - y) \exp(x - y)\,)$$

und bestimmen Sie die Punkte (x, y), die

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$$

erfüllen.

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f und entscheiden Sie mit deren Hilfe, ob f lokale Extremstellen besitzt, und bestimmen Sie gegebenfalls deren Typ.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$y'' - 7y' + 12y = \exp(-x).$$

a) Bestimmen Sie die Menge der Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

b) Geben Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n}(5n^2 + 1)} x^n$$

b) Beurteilen Sie, ob $R(x)$ an den Stellen $x = r$ und $x = -r$ konvergiert oder divergiert.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass f im Punkt $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass g im Punkt $x = 0$ stetig und differenzierbar ist.

Aufgabe 5:

Gegeben sei für $x > -2$ die Funktion

$$h(x) = (x-1) \cdot \ln(x+2).$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der x-Achse, der Funktion $h(x)$ und den beiden Nullstellen von $h(x)$ eingeschlossen wird.